ANNÉE 1976

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE DE L'AIR

(Elèves Officiers de l'Air, Elèves Officiers Mécaniciens de l'Air, Elèves Officiers des Bases de l'Air)

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

(Durée : 1 h 30)

L'objet de ce problème est de vérifier sur un exemple la formule :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^2} = -\int_0^x \ln\left(2\sin\frac{t}{2}\right) dt \qquad \text{pour} \qquad x = \frac{\pi}{2}.$$

Le symbole $\ln(x)$ désignant le logarithme népérien de x [noté aussi $\mathrm{Log}(x)$].

1. — Calculer une valeur approchée à 5.10^{-3} près de $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} = \frac{\sin(nx)}{n^2}$ pour $x = \frac{\pi}{2}$.

On rappelle que si une série alternée de terme général u_n est convergente avec $|u_n|$ décroissant et tendant vers 0 alors le reste R_n

$$R_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots = \sum_{i=n+1}^{\infty} u_i$$

vérifie la relation :

$$|R_n| \leqslant |u_{n+1}|$$

On précisera si la valeur indiquée est une valeur approchée par excès ou par défaut.

2. — Le calcul de $\sigma = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(2\sin\frac{t}{2}\right) dt$ se fera en utilisant l'égalité :

$$\sigma = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(2\sin\frac{t}{2}\right) dt = \left(\frac{\pi}{2}\right)\ln 2 + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(\sin\frac{t}{2}\right) dt + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\sin\frac{t}{2}\right) dt$$

Quelques valeurs numériques servant dans le 2.) et le 3.) sont données en fin de problème.

a) Montrer que :

$$\ln\left(\frac{t}{2}\right) + \ln\left(1 - \frac{t^2}{24}\right) \leqslant \ln\left(\sin\frac{t}{2}\right) \leqslant \ln\left(\frac{t}{2}\right) + \ln\left(1 - \frac{t^2}{24} + \frac{t^4}{1920}\right)$$

En utilisant sans la justifier l'inégalité :

$$\text{pour} \qquad 0 \leqslant x \leqslant 0{,}5 \qquad\qquad -x - x^2 \leqslant \ln(1-x) \leqslant -x$$

en déduire que :

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\ln\left(\frac{t}{2}\right) - \frac{t^2}{24}\right] dt \quad \text{est une valeur approchée de} \quad \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(\sin\frac{t}{2}\right) dt$$

avec une incertitude que l'on évaluera.

... /...

b) Calculer avec la précision permise par les tables, à l'aide d'une primitive :

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\ln\left(\frac{t}{2}\right) - \frac{t^2}{24} \right] dt$$

3. — La méthode de Simpson donne pour valeur approchée de $\int_a^b f(t)\,dt$ le réel :

$$\sum = \frac{b-a}{6n}\left[y_0 + y_{2n} + 2\,(y_2 + y_4 + \ldots + y_{2n-2}) + 4\,(y_1 + y_3 + \ldots + y_{2n-1}) \right]$$

avec : $$y_i = f\left(a + i\,\frac{b-a}{2n}\right)$$

l'erreur étant majorée en valeur absolue par :

$$\varepsilon = \frac{(b-a)^5}{180 \cdot (2n)^4} \cdot \mathrm{Sup}|f''''|$$

où Sup $|f''''|$ représente le maximum sur l'intervalle $[a, b]$ de la valeur absolue de la dérivée quatrième de f.

a) Quelle valeur de n faut-il choisir pour que l'erreur sur le calcul de $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\sin\frac{t}{2}\right) dt$ par la méthode de Simpson soit inférieure à 5.10^{-4} ?

b) On fixe $n = 2$ (soit une subdivision en quatre intervalles). Calculer la valeur approchée correspondante de :

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\sin\frac{t}{2}\right) dt$$

c) Quelle valeur de $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(2\sin\frac{t}{2}\right) dt$ obtient-on ? Comparer avec la valeur trouvée au 1.

On donne les valeurs numériques suivantes :

$$\pi \ln\left(\frac{\pi}{8}\right) \# -2{,}936483$$

$$\frac{\pi}{2} \ln(2) \# 1{,}088793$$

Valeurs de la fonction $f(t) = \ln\left(\sin\frac{t}{2}\right)$ pour des valeurs de t exprimées en degrés sexagésimaux :

$$\begin{aligned} f(45^\circ) &= -0{,}960547 \\ f(56^\circ 15') &= -0{,}752055 \\ f(67^\circ 30') &= -0{,}587760 \\ f(78^\circ 45') &= -0{,}455086 \\ f(90^\circ) &= -0{,}346574 \end{aligned}$$

FIN

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail